

11. Модель множественной регрессии. Метод наименьших квадратов. Теорема Гаусса-Маркова.

$$y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$$

где x_{tp} — значения регрессора x_p в наблюдении t , а $x_{t1} = 1, t = 1, \dots, n$.

1. $y_t = \beta_1 x_{t1} + \beta_2 x_{t2} + \dots + \beta_k x_{tk} + \varepsilon_t, \quad t = 1, \dots, n$ — спецификация модели.
2. $x_{t1}, \dots, x_{tk}$ — детерминированные величины. Векторы $x_s = (x_{1s}, \dots, x_{ns})', s = 1, \dots, k$ линейно независимы в R^n .
3. а. $E\varepsilon_t = 0, E(\varepsilon_t^2) = V(\varepsilon_t) = \sigma^2$ — не зависит от t .
б. $E(\varepsilon_t \varepsilon_s) = 0$ при $t \neq s$ — статистическая независимость (некоррелированность) ошибок для разных наблюдений. Часто добавляется следующее условие.
с. Ошибки $\varepsilon_t, t = 1, \dots, n$ имеют совместное нормальное распределение: $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$.

В этом случае модель называется *нормальной линейной регрессионной*.

Метод наименьших квадратов

Целью метода является выбор вектора оценок $\hat{\beta}$, минимизирующего сумму квадратов остатков e_t (необъясненную часть дисперсии).

$$e = y - \hat{y} = y - X\hat{\beta},$$
$$ESS = \sum e_t^2 = e'e \rightarrow \min_{\hat{\beta}}$$

Выразим $e'e$ через X и β :

$$e'e = y'y - 2\hat{\beta}'X'y + \hat{\beta}'X'X\hat{\beta}.$$

Необходимые условия минимума ESS получаются дифференцированием по вектору $\hat{\beta}$

$$\frac{\partial ESS}{\partial \hat{\beta}} = -2X'y + 2X'X\hat{\beta} = 0,$$

откуда, учитывая обратимость матрицы $X'X$ находим оценку метода наименьших квадратов:

$$\hat{\beta}_{OLS} = (X'X)^{-1}X'y.$$

Теорема Гаусса-Маркова

Для модели 1-Заб оценка $\hat{\beta}$, полученная с помощью метода наименьших квадратов, является лучшей линейной несмещенной оценкой.

Доказательство:

1) $\hat{\beta}'$ — несмещенная оценка β

$$E\hat{\beta} = E[(X'X)^{-1}X'y] = (X'X)^{-1}X'Ey = (X'X)^{-1}X'E(X\beta + \varepsilon) = (X'X)^{-1}X'X\beta + (X'X)^{-1}X'E\varepsilon = \beta.$$

Пусть $A = (X'X)^{-1}X'$

Тогда $\widehat{\beta} = Ay$

Пусть b — любая другая несмещенная оценка β . Тогда можно представить b в виде

$$b = (A + C)y, C \text{ } k \times n$$

Так как b — несмещенная оценка β , то $\beta = Eb = (A + C)Ey = (A + C)E(X\beta + \varepsilon) = (A + C)X\beta + (A + C)E\varepsilon = (A + C)X\beta = (AX + CX)\beta = (I + CX)\beta \Rightarrow CX = 0$.

2) Вычислим матрицу ковариаций $\widehat{\beta}$:

$$V(\widehat{\beta}) = V(Ay) = AV(y)A' = A\sigma^2 I A' = \sigma^2 (X'X)^{-1} X'X (X'X)^{-1} = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

$$3) V(b) = V(\widehat{\beta}) + \sigma^2 CC', CC' \geq 0.$$

$$\Rightarrow V(b) \geq V(\widehat{\beta}).$$